Determinanten

Bernd Fiedler

Mathematik I für Informatiker
Studiengang BENG–TKI–2007K,
SG07/3_2

Teletutoring 19. Dezember 2007

Hochschule für Telekommunikation
Leipzig

Begriff der Determinante

$\mathbb{R}^{n\times n}$:= Menge der reellen $(n \times n)$-Matrizen
$\mathbb{C}^{n\times n}$:= Menge der komplexen $(n\times n)$-Matr.

Det : $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R},\ A \mapsto |A|$ oder Det$A$
Det : $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C},\ A \mapsto |A|$ oder Det$A$

Def.: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbb{C}^{n\times n}$$

$$\boxed{\mathrm{Det}A := \sum_{p\in S_n} (-1)^{I(p)} \cdot a_{1p(1)} \cdot a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}}$$

S_n := Menge aller *Permutationen* (Vertauschungen) p der Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

Beisp.: $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$

$p(1) = 3$, $p(2) = 5$, $p(3) = 1, \ldots,$ $p(6) = 2$

$I(p)$:= Anzahl der *Inversionen* in p

Def.: i, j sind *Inversion* bzgl.p, wenn
$i < j$ und $p(i) > p(j)$ (Leupold falsch!)

Im Beisp.: $I(p) = 7$ (Leupold $I(p) = 2$)

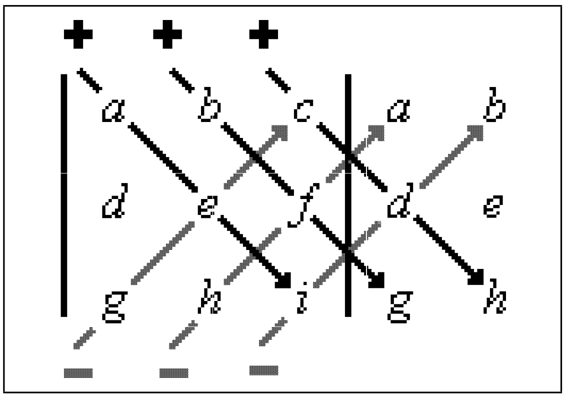
Kleine Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Regel von SARRUS

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ll} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} & + \\ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} & + \\ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} & - \\ a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} & - \\ a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} & - \\ a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12} & \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow$$



Adjunkten

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Für A_{23}:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ & & a_{23} & & & \\ a_{31} & a_{32} & & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{23} = \left|\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz

Entwicklung nach i-ter Zeile

$$|A| = \sum_{l=1}^{n} a_{il}A_{il} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Entwicklung nach i-ter Spalte

$$|A| = \sum_{l=1}^{n} a_{li}A_{li} = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} &= -e\begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + f\begin{vmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} \\ &\quad -g\begin{vmatrix} a & b & d \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} + h\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} &= -b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + f\begin{vmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} \\ &\quad -j\begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix} + n\begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & l \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Rechenregeln

$$\left|A^T\right| = |A|$$

Vertauscht man in Det. zwei Zeilen/Spalten, so ändert Det. das Vorzeichen.
("benachbart" aus Leupold kann entfallen.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \lambda a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Folg.: $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

Rechenregeln (Fortsetzung)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{i1} & \cdots & \tilde{a}_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+\tilde{a}_{i1} & \cdots & a_{in}+\tilde{a}_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Addiert man zu einer Zeile/Spalte einer Det. ein Vielfaches einer anderen Zeile/Spalte dieser Det., so ändert sich der Wert der Det. nicht.

$|A| = 0 \;\Leftrightarrow$ Zeilen/Spalten von A sind linear abhängig.

Insbesondere ist $|A| = 0$, falls:

- Eine Zeile/Spalte von A enthält nur Nullen.
- Zwei Zeilen/Spalten von A sind gleich.
- Zwei Zeilen/Spalten von A sind proportional.

Rechenregeln (Fortsetzung)

A Dreiecksmatrix $\Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Findet Anwendung in Computerprogrammen:

- Gaußscher Alg. $\Rightarrow$ Wandle $|A|$ in Determinante einer Dreiecksmatrix $|\tilde{A}|$ um.
- Dann: $|A| = |\tilde{A}| = \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{nn}$

A, B vom Typ (n, n)

$$\begin{aligned} |A \cdot B| &= |A| \cdot |B| \\ |A \cdot B| &= |B \cdot A| \\ |A^n| &= |A|^n \\ |A^{-1}| &= \frac{1}{|A|} \end{aligned}$$

Cramersche Regel

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad &\ \vdots \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
D_{x_i} &= \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ i \end{array} \\
x_i &= \frac{D_{x_i}}{D}, \quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcl} \cos(\alpha)x & + & \sin(\alpha)y & + & \alpha^2 z & = & 1 \\ 3x & - & e^\alpha y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & \alpha^2 \\ 3 & e^\alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (e^\alpha + 1)\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha) - (3 + e^\alpha)\alpha^2 \\ D_x &= \begin{vmatrix} 1 & \sin(\alpha) & \alpha^2 \\ 2 & e^\alpha & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (e^\alpha + 1) + \sin(\alpha) - (2 + 3e^\alpha)\alpha^2 \\ D_y &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & 1 & \alpha^2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\cos(\alpha) - 2 + 7\alpha^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{(e^\alpha + 1) + \sin(\alpha) - (2 + 3e^\alpha)\alpha^2}{(e^\alpha + 1)\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha) - (3 + e^\alpha)\alpha^2} \\ y &= \frac{-\cos(\alpha) - 2 + 7\alpha^2}{(e^\alpha + 1)\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha) - (3 + e^\alpha)\alpha^2} \end{aligned}$$

D_z und z analog

Inverse Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Determinantenberechnung über Dreiecks-matrix

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ?$$

I	$\boxed{3}$	-7	1	0	
II	5	1	0	-4	II - $\frac{5}{3}$ I
III	0	2	-6	8	
IV	2	5	1	-1	IV - $\frac{2}{3}$ I
I	3	-7	1	0	
II	0	$\boxed{12{,}669}$	-1,667	-4	
III	0	2	-6	8	III - 0,158 II
IV	0	9,669	0,333	-1	IV - 0,763 II
I	3	-7	1	0	
II	0	12,669	-1,667	-4	
III	0	0	$\boxed{-5{,}737}$	8,632	
IV	0	0	1,605	2,052	IV + 0,280 III
I	3	-7	1	0	
II	0	12,669	-1,667	-4	
III	0	0	-5,737	8,632	
IV	0	0	0	4,469	

$$\begin{aligned} |A| &= 3 \times 12,669 \times (-5,737) \times 4,469 \\ &= -974,448 \end{aligned}$$

Exaktes Ergebnis: $|A| = -974$