Matrizen

Bernd Fiedler

Mathematik I für Informatiker
Studiengang BENG–TKI–2007K,
SG07/3_2

Teletutoring 5. Dezember 2007

Hochschule für Telekommunikation
Leipzig

"Unfortunately, no one can be told what a(?) matrix is. You have to see it for yourself."

Aus dem Film: Matrix.
(fast)

Definition einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad a_{kl} \in \mathbb{R},\ \mathbb{C}$$

Typ $A = (m, n)$ $\qquad a_{kl}$: k Zeilenindex
l Spaltenindex

Transponieren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A symmetrisch, falls $A^T = A$
A schiefsymmetrisch, falls $A^T = -A$

$$\text{symm. :} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{schiefs. :} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Typ $A = (n, n) \quad \Rightarrow \quad A = A_s + A_a$

$$A_s = \frac{1}{2} \cdot \left(A + A^T\right)$$

$$A_a = \frac{1}{2} \cdot \left(A - A^T\right)$$

Spezielle Matrizen

Name	Beispiel
Nullmatrix	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Einheitsmatrix	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Obere Dreiecksmatrix	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Untere Dreiecksmatrix	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
Diagonalmatrix	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Addition von Matrizen; Mult. mit Zahl

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbb{C}$$

Rechenregeln für $A + B$, λA

Es gelten die gleichen Regeln wie für das Rechnen mit n-Tupeln, die man als Vektoren betrachtet.

Zusätzlich: $(A + B)^T = A^T + B^T$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Komplexe Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1+j & 5+j & -2+3j \\ 4 & 1-j & 5j \end{pmatrix}$$

$C = A + jB, \quad A, B$ reell
$A = \operatorname{Re} C,\ B = \operatorname{Im} C$

$$\operatorname{Re} C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{Im} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Konjugiert komplexe Matrix

$C = A + jB,\ A, B$ reell $\Rightarrow\ C^* = A - jB$

$$C^* = \begin{pmatrix} 1-j & 5-j & -2-3j \\ 4 & 1+j & -5j \end{pmatrix}$$

Adjungierte Matrix zu $C = A + jB$:
$C^{*T} = A^T - jB^T$

Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{4} \\ 5 & 2 & 8 & -7 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 7 \\ \boxed{8} & 0 \\ \boxed{0} & 1 \\ \boxed{1} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{30} & 15 \\ -1 & 8 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ nur def., wenn A, B verkettet sind, d.h.
Typ $A = (m, k)$, Typ $B = (k, n)$.

Dann ist: Typ $(A \cdot B) = (m, n)$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\lambda(A \cdot B) &= (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) \\
A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C \\
A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\
(B + C) \cdot A &= B \cdot A + C \cdot A \\
A \cdot O &= O' \cdot A = O'' \\
A \cdot E &= E' \cdot A = A \\
(A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T
\end{aligned}$$

Im allgemeinen: $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

$\boxed{A \cdot B = 0 \text{ möglich, obwohl } A \neq 0 \text{ und } B \neq 0}$

Inverse Matrix

Def.: Sei A $(n \times n)$-Matrix. Gibt es zu A eine $(n \times n)$-Matrix B, so daß

$$A \cdot B = B \cdot A = E\,,$$

dann heißt B die *inverse Matrix* zu A.
Bezeichnung: $A^{-1} := B$

Def.: Existiert zu A die Inverse A^{-1}, dann heißt A *regulär*, andernfalls *singulär*

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \left(A^{-1}\right)^{-1} &= A \\ \left(A^{T}\right)^{-1} &= \left(A^{-1}\right)^{T} \\ (A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

Berechnung einer inversen Matrix

Gesucht $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

I	2	1	1	1	0	0	Vertausche I, III
II	3	2	1	0	1	0	
III	1	2	0	0	0	1	
I	1	2	0	0	0	1	
II	3	2	1	0	1	0	II - 3I
III	2	1	1	1	0	0	III - 2I
I	1	2	0	0	0	1	
II	0	-4	1	0	1	-3	II/(-4)
III	0	-3	1	1	0	-2	
I	1	2	0	0	0	1	I - 2II
II	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	
III	0	-3	1	1	0	-2	III $+$ 3II
I	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
II	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	
III	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	III*4
I	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	I - $\frac{1}{2}$III
II	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	II $+$ $\frac{1}{4}$III
III	0	0	1	4	-3	1	
I	1	0	0	-2	2	-1	
II	0	1	0	1	-1	1	
III	0	0	1	4	-3	1	

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$